Стадник О. В.,

ст. преподаватель кафедры русского языка и естественных дисциплин

БГТУ им. В. Г. Шухова

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

*Ключевые слова: аддитивная функция, мультипликативная функция, характеристическая функция, распределение простых чисел, функция Эйлера.*

*Аннотация: в данной статье рассматриваются распределение значений аддитивных функций, в частности функция Эйлера.*

В теории чисел традиционными являются исследования, посвященные законам распределения значений арифметических функций. Большая часть таких исследований проводилась методами, связывающими теорию чисел и теорию вероятностей. Распределения значений аддитивных и мультипликативных функций тесно связаны со свойствами распределения простых чисел в натуральном ряду.

Вклад в развитие вероятностной теории чисел внесли венгерский математик П. Эрдеш, советские математики Ю.В. Линник, А.Г. Постников, и литовский математик Й.П.Кубилюс и многие другие. Й.П.Кубилюс в своей монографии «Вероятностные методы в теории чисел» рассмотрел основы вероятностной теории чисел в приложении к распределению значений аддитивных функций.

В 1954-1955гг. Й.П. Кубилюсу удалось, исходя из аксиоматики А.Н. Колмогорова теории вероятностей, дать теоретико-вероятностную интерпретацию аддитивных функций, и, таким образом, вопросы распределения значений этих функций свести к соответствующим вопросам теории суммирования независимых случайных величин [1].

В качестве поля событий в теоретико-числовых задачах стали рассматривать отрезок натурального ряда, случайной величиной является значение арифметической функции . А функцией распределения является

Аналогом математического ожидания является сумма

То есть среднее значение функции на отрезке . В качестве дисперсии выступает:

Характеристическая функция -

Среди мультипликативных арифметических функций особое место занимает функция Эйлера, с которой связаны многие задачи теории чисел. Исследованиям о распределении значений этой функции занимались многие математики.

Содержание данной статьи составляет обзор результатов о распределении значений функции Эйлера.

Известно [8,289], что для каждого значения , существует предел

Также доказано, что функция непрерывна в каждой точке [2].

Г. Дэвенпорт предложил метод, который позволяет дать явное выражение для функции

Изложим метод Дэвенпорта по [2, 348-352].

Возьмем число λ, и назовем натуральное число *n* -числом, если . Очевидно, что при любом

т. е. все кратные λ - числа суть λ - числа. Ввиду этого целесообразно ввести понятие примитивного λ - числа; число *n* называется примитивным λ - числом, если оно не содержит собственного делителя, являющегося λ - числом. Очевидно, что в примитивное λ - число простые сомножители могут входить лишь в первой степени. Из этого вытекает, что коль скоро дано конечное множество простых чисел *р*1, *р*2, ..., *р*3, то существует лишь конечное множество примитивных λ - чисел, составленных только из *р*1, *р*2, ..., *р*3 . Наконец, поскольку

то для каждого λ, существует бесконечно много примитивных чисел.

Пусть *Р* - большое натуральное число. Обозначим через функцию, определенную так:

В силу того, что функция вполне мультипликативна

Обозначим для краткости

**Лемма .** Для *V* (λ) справедлива формула

**Доказательство**. По теореме Деланжа при

Мы будем использовать это равенство для натуральных *s*.

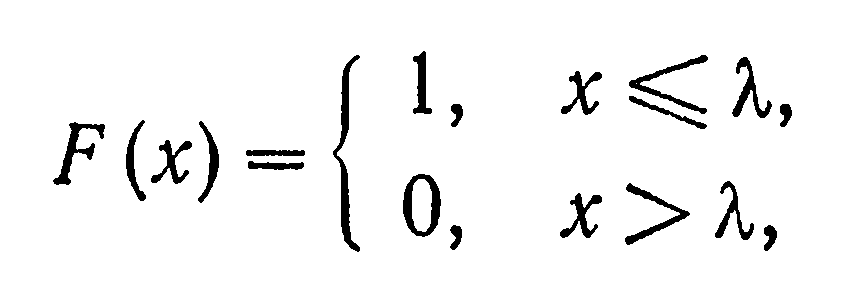
С другой стороны, имеем

Значит, при любом *s* = 0, 1, 2, ...

Отсюда следует, что для любого полинома *P* (*x*)

С помощью теоремы Вейерштрасса о приближении функции полиномами получаем, что для любой непрерывной на отрезке [0,1] функции *F*(*x*)

Производя обычное приближение функции



непрерывными функциями, убеждаемся в том, что

**Теорема 1.** Пусть *a*1, *a*2 …*aυ*-1, *aυ* – начало последовательности примитивных λ – чисел [*as*1, *as*2 …*ask*] –общее наименьшее кратное чисел *as*1, *as*2 …*ask.*

Обозначим

(плотность чисел, делящихся на *av*, но неделящихся ни на какое из чисел *a*1, *a*2 …*aυ*-1)

**Доказательство**. Величина

есть плотность чисел, делящихся, по меньшей мере, на одно из *a*1, *a*2 …*ak.*

Поскольку все эти числа суть λ - числа, то

Отсюда следует, что ряд

сходится и

Нам надо доказать противоположное неравенство.

Пусть *b*1, *b*2 …*bh* - последовательность примитивных λ - чисел, которые делятся только на простые числа *≤ Р*. Число *n*, состоящее из простых чисел, не превосходящих *Р*, будет λ - числом тогда и только тогда, когда *n* есть кратное какого-либо из чисел *b*1, *b*2 …*bh*, причем *n/bj* состоит только из простых чисел, не превосходящих *Р*. Отсюда

где (*b*1, *b*2 …*bh*) - плотность множества тех чисел, которые делятся по меньшей мере на одно из чисел *b*1, *b*2 …*bh*. Пусть *b*1, *b*2 …*bh* есть подмножество чисел *a*1, *a*2 …*ak* ,где *ak*  - максимальное из *b*1, *b*2 …*bh*. Очевидно,

Так как

то

Значит,

Теорема доказана.

С помощью метода Дэвенпорта Б. А. Венков установил следующие свойства функции

а) Функция *V* (λ) есть возрастающая функция на сегменте [0, 1], т. е. 1 > λ1 > λ2 > 0, то *V*(λ1) > *V*(λ2) [2, 353].

б) На всюду плотном множестве точек отрезка [0, 1] функция *V* (λ) имеет левую производную, равную бесконечности (это множество в работе Б. А. Венкова задано конструктивно) [2, 353].

П. Эрдёш получил следующий результат о распределении значений функции φ (*n*)/*n* [3].

**Теорема 2.** Обозначим через *F*(*x*) функцию распределения для функции

.

Тогда для любого ε > 0 и достаточно больших *х*:

где

Список литературы:

1. Кубилюс Й.П. Вероятностные методы теории чисел.- Вильнюс, 1961
2. Постников А.Г. Арифметическое моделирование случайных процессов. //Тр. матем. ин-та им. Стеклова В.А., 1960
3. Erdos P., Wintner A. Additive arithmetical functions and statistical independence. // American J. Math. 61, №3, 1939, 713-721